

# מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 47 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של עקום.....1
2. הנגזרת ושימושיה.....3
3. שימושי האינטגרל המסוים.....4
- 4.....

## הצגה פרמטרית של עקום

### שאלות

(1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א.  $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב.  $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג.  $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א.  $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב.  $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג.  $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר  $t$ , מצאו משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים  $x$  ו- $y$  בלבד:

א.  $x = t - 4, y = t^2$

ב.  $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג.  $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד.  $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה.  $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו.  $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$  ( $k$  קבוע).

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left( \frac{y - 1}{2} \right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

## הנגזרת ושימושיה

### שאלות

(1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה  $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$

הנתונה בצורה פרמטרית.

(2) נתון העקום  $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את  $y'(x)$  בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה  $t = -1$ .

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה  $t = -1$ .

(3) נתון העקום  $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה  $(0, 0)$ .

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי,

ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של  $t$  העקום קמור/קעור?

### תשובות סופיות

(1)  $y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}$ ,  $y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$

(2) א. ראו בסרטון. ב.  $y' = \frac{-2}{2t+1}$ . ג.  $y = 2x + 3$ . ד.  $y = -0.5x + 3$

(3) א. ראו בסרטון. ב.  $y = \pm \sqrt{3}x$ . ג. אופקי-  $(0, -9)$  אנכי  $(2, -6), (-2, -6)$

ד.  $-1 < t < 1$  קמור.  $t > 1$  או  $t < -1$  קעור.

## שימושי האינטגרל המסוים

$$(1) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בעקום } C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בתוך האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ כאשר } a, b > 0$$

\* שימו לב שאם  $a = b = r$ , נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס  $r$ .

$$(3) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq \pi, \quad x = \cos t, \quad y = t + \sin t$$

לבין ציר ה- $x$ .

$$(4) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad x = 4 \cos t, \quad y = \sin^2 t$$

לבין ציר ה- $x$ .

$$(5) \quad \text{חשבו את אורך העקום } 0 \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$(6) \quad \text{חשבו את אורך העקום } \begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}, \text{ מהנקודה } (1, 0) \text{ לנקודה } (-1, \pi).$$

$$(7) \quad \text{חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית}$$

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

$$(8) \quad \text{חלק העקום } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \pi, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} x.$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(9) \quad \text{חלק העקום } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \frac{\pi}{2}, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} y.$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(10) \quad \text{חשבו את אורך העקום } -\pi \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$$

**11** חשבו את אורך העקום  $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$  ,  $1 \leq t \leq 3$ .

### תשובות סופיות

**(1)**  $8/3$

**(2)**  $\pi ab$

**(3)**  $1.5\pi$

**(4)**  $16/3$

**(5)**  $8$

**(6)**  $4$

**(7)** אורך העקום הוא  $2\pi$ . המרחק שעבר החלקיק הוא  $4\pi$ .

**(8)**  $4\pi r^2$

**(9)**  $6\pi/5$

**(10)**  $6\pi\sqrt{29}$

**(11)**  $\sqrt{3}e(e^2 - 1)$